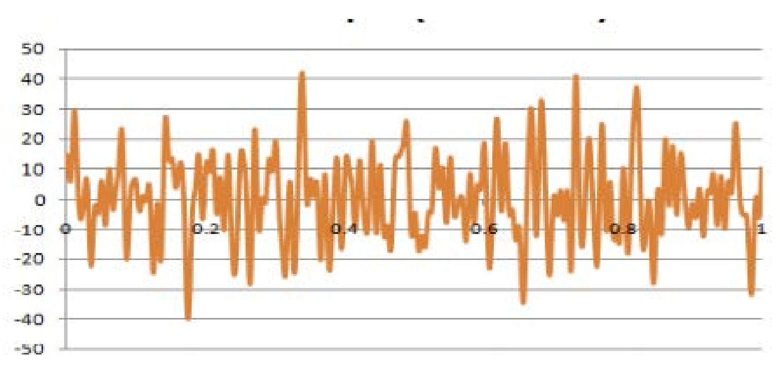
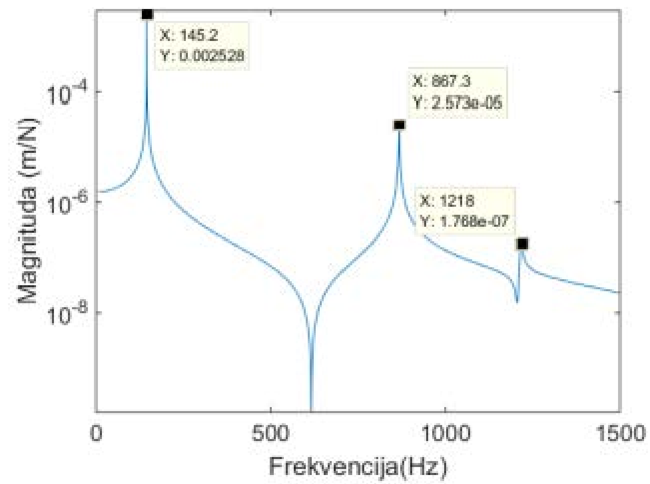
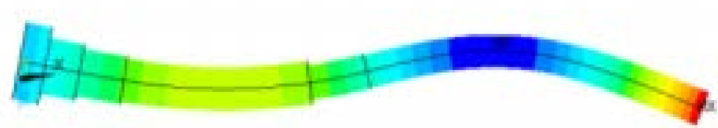
6. DINAMIČKA ANALIZA U MKE







Dinamička analiza u MKE

- Koristi se za određivanje ponašanja strukture pod opterećenjima koja zavise od vremena ili frekvencija (učestalosti).
- Kod ovih analiza sile inercije i/ili mogućnost pojave prigušenja igraju značajnu ulogu.
- Dinamička analiza takođe uključuje proučavanje slobodnih vibracija tj. oscilovanje konstukcije nakon prestanka dejstva sile.
- Pri ovim analizama obično se uzima u obzir dinamičko ponašanje usled sledećeg:
  - Slobodnih vibracija (sopstvene frekvencije i oblici oscilovanja)
  - Prinudnnih vibracija (npr. vibracije nastale usle obrtnih elemenata)
  - Seizmičkih aktivnosti/Udarnih opterećenja (npr. zemljotresi, eksplozije)
  - Slučajnih (nasumičnih) vibracija (npr. drumski transport)
  - Vibracija usled opterećenaja koja su promenljiva tokom vremena (sudar, udarac čekićem itd.)
- Svaka situacija se rešava određenim tipom dinamičke analize.
- Izbor odgovarajućeg tipa dinamičke analize zavisi od vrste ulaznih podataka, kao i vrste željenog rezultata.

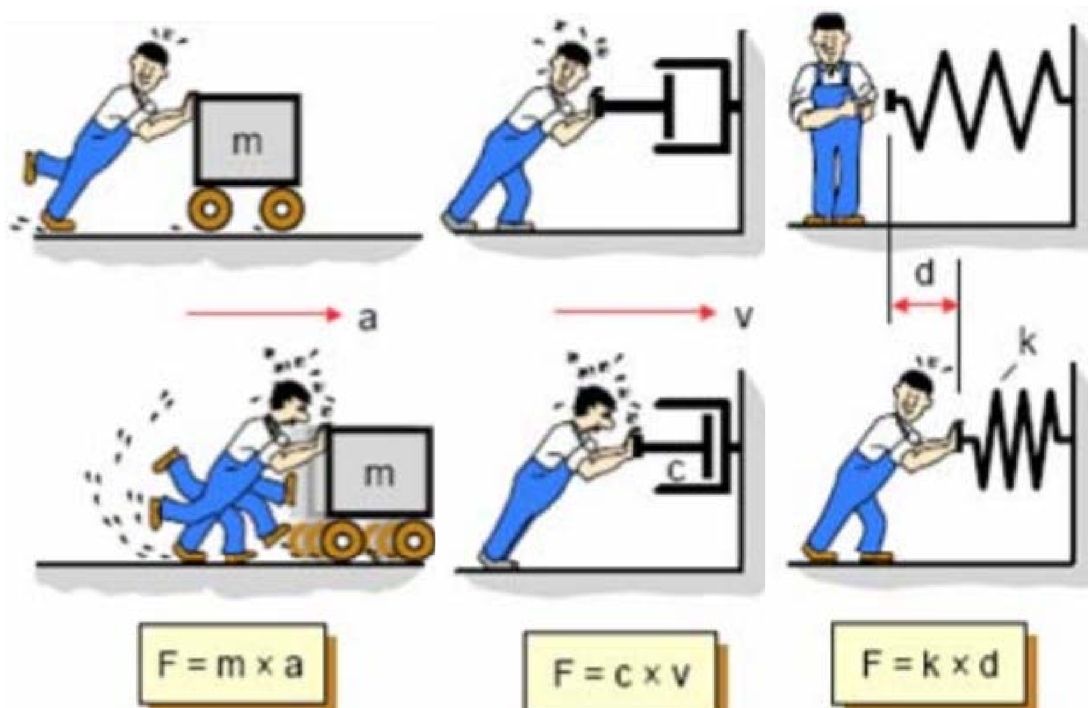
1. Tipovi dinamičke analize

Tip analize	Ulaz	Izlaz	Neline - arnost
Modalna	-	▪ sopstvene frekvencije i glavni oblici oscilovanja ▪ profil napona/deformacija	Ne
Harmonijska	sinusoidna pobuda u opsegu traženih frekvencija	▪ sinusoidni odziv na svakoj frekvenciji ▪ min/max odziv u definisanom opsegu frekvencija	Ne
Spektralna	spektar koji predstavlja odgovor na određenu vremensku pobudu (Amp./Hz)	maksimalni odziv tokom vremena	Ne
Nasumične vibracije	Spektar snage, predstavljen kao rapodela verovatnoće pobude (PSD, Amp^2/Hz)	verovatnoća raspodele odziva	Ne
Nestacionarna	Opterećenja promenljiva u vremenu (s, ms)	Vremensko promnljiv odziv	Da

2. Opšta jednačina kretanja

- Nelinearna jednačina kretanja za nestacionarnu dinamičku analizu (**opšta jednačina**)

$$\underbrace{[M]\{\ddot{u}\}}_{\text{Inercija}} + \underbrace{[C]\{\dot{u}\}}_{\text{Prigušenje}} + \underbrace{\overbrace{[K(u)]\{u\}}^{\text{Nelinearno}}}_{\text{Krutost}} = \underbrace{\{F(t)\}}_{\text{Primenjena sila}}$$



Ubrzanje Brzina Pomeranje

3. Modalna analiza

- Modalna analiza se koristi za određivanje sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja linearnih elastičnih struktura.
- Osnovni tip dinamičke analize jer:
  - omogućava da se pri projektovanju izbegne rezonancija ili da struktura vibrira na određenim frekvencijama,
  - se može zaključiti kakve će projektovana struktura da ima na različite vrste dinamičkih opterećenja,
  - pomaže u određivanju kontrolnih rešenja (granica-opsega frekvencija) za druge tipove dinamičke analize
- Modalna analiza je osnova za određivanje integracionih vremenskih koraka u analizi tranzijentnog odgovora ili analizi frekventnog odgovora.
- **Pretpostvake:**
  - **Struktura je linearna (npr. [M] i [K] su konstantne).**
  - **Nema spoljašnjeg opterećenja.**

3. Modalna analiza bez prigušenja

- Linearna jednačina kretanja za slobodne neprigušene vibracije je:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

- Za linearne sisteme, slobodne oscilacije biće harmonijske u formi:

$$\{u\} = \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

$$\{\ddot{u}\} = -\omega_i^2 \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

- Svakoj sopstvenoj vrednosti, koja je proporcionalna **sopstvenoj frekvenciji**, postoji odgovarajući **sopstveni vektor**, ili **oblik oscilovanja - mod**.
- Modalna analiza za neprigušeno slobodno oscilovanje daje sopstvene frekvencije prema:

$$\left([K] - \omega_i^2 [M]\right)\{\phi_i\} = 0$$

ω_i - *i* –ta sopstvena kružna frekvencija (rad/s)

ϕ_i - sopstveni vektor modova oscilovanja *i*-te sopstvene frekvencije

Sopstvena vrednost i kružna frekvencija oscilovanja imaju međusobnu vezu:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \; [Hz]$$

3. Modalna analiza bez prigušenja

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{\phi_i\}=0$$

- Ova jednakost je zadovoljena ako:

a) $\phi_i = 1$ - Prosto rešenje, ne podrazumeva vibracije

b) ili ako je $\det\left([K]-\omega_i^2[M]\right)=0$

- Ovo je problem sopstvenih frekvencija oscilovanja, koji se može rešiti za svaki koren $\omega^2{}_i$
- Rešenje detrminante $\omega_i^2=0;\ \ \omega_{3/4n}^2=2-\sqrt{2};\ \omega_{5/6n}^2=2;\ \ \omega_{7/8n}^2=2+\sqrt{2}$ predstavlja polove, odnosno rezonantnu frekvenciju sistema (za sistem sa četiri stepena slobode).
- Za svaku od dobijenih frekvencija postoji vektor oblika oscilovanja ($\{\phi\}_1$, $\{\phi\}_2$,……. $\{\phi\}_n$) koji određuje pomeranje svakog od stepeni slobode na datoj frekvenciji .

3. Modalna analiza bez prigušenja

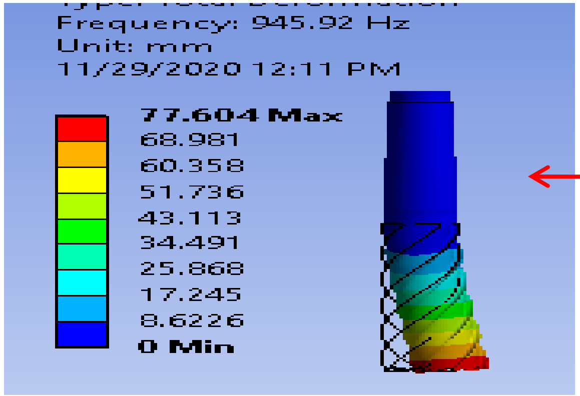
- U modalnim analizama je:
  - Soptvena vrednost (eigenvalues) – kvadrat sopstvene kružne frekvencije (ωi)
  - Sopstveni vektor (eigenvectors) – odgovarajući oblik oscilovanja (ϕi)
- S obzirom da vektori oblika oscilovanja predstavljaju odnose amplituda, dakle ne predstavljaju amplitude u apsolutnim vrednostima, potrebno je izvršiti njihovu normalizaciju.
- Postoji više tehnika normalizacije (mase, krutosti..), u programskim sistemima na bazi konačnih elemenata se obično koristi normalizacija u odnosu na masu.

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1$$

- Zbog ove normalizacije samo rešenja oblika za odgovarajuće stepene slobode imaju stvarno značenje.

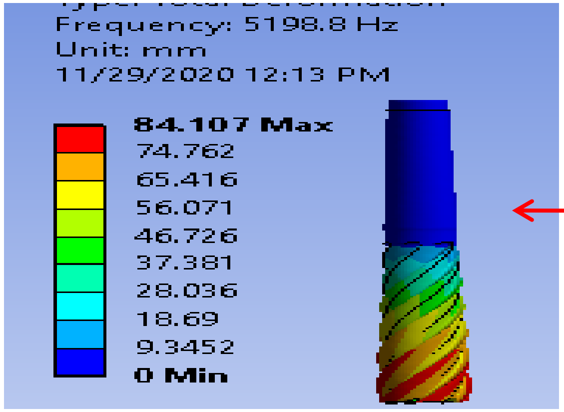
3. Modalna analiza bez prigušenja

- Kvadratni koreni sopstvenih vrednosti su soptvene kružne frekvencije (rad/s).



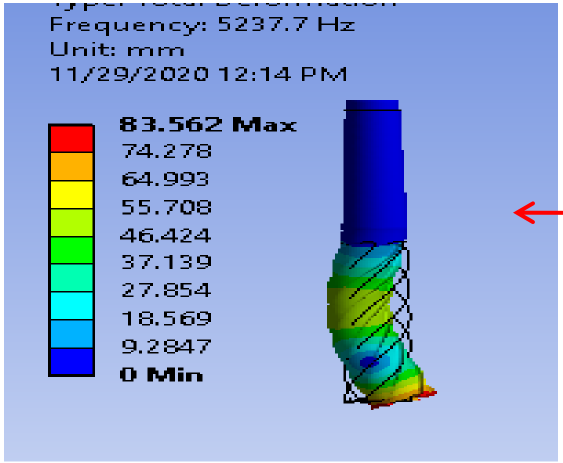
Mod 1
{Φ}1
*f*1 =945 Hz

- Sopstvene frekvencije *fi* se mogu izračunati kao: *fi* = *ωi/2π* (Hz)



Mod 2
{Φ}2
*f*2 =5198 Hz

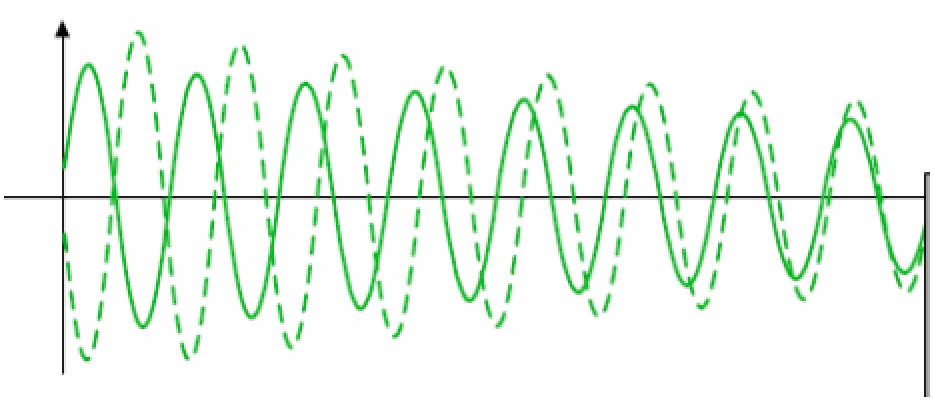
- Sopstveni vektori ϕ*i* predstavljaju oblike oscilovanja, npr. oblik pretpostavljen pri vibracijama na frekvenciji *fi*



Mod 3
{Φ}3
*f*2 =5240 Hz

4. Prigušenje u MKE

- Prigušenje je mehanizam rasipanja energije koji uzrokuje da se vibracije vremenom smanjuju i na kraju eventualno zaustave.
- Prigušenje se javlja zbog dva razloga:
  - Prvi razlog je pojava histereze - vremensko zaostajanje deformacije u odnosu na naprezanje i pojava disipacije energije usled nelinearnih svojstava materijala.
  - Drugi razlog su visokoelastična svojstva materijala, pri čemu se prigušenje uglavnom javlja na mestima kontakta.
- Kod većine elemenata koji se primenjuju u konstrukcijama vrednost prigušenja je od 0,5% do 7% vrednosti kritičnog prigušenja.
- Vrednost prigušenja može zavisiti od materijala, brzine kretanja i/ili učestaonosti vibracija.



4. Prigušenje u MKE

- Prigušenje se može klasifikovati kao:
  - Viskozno prigušenje (npr. prigušivač, amortizer, itd) ; **$F_D = - c\ v$**
  - Prigušenje u materijalu/ histerezisno prigušenje (npr. unutrašnje trenje)
  - Prigušenje usled suvog trenja (npr. trenje klizanjem); **$F_D = - i\ \mu\ K\ x$**
  - Numeričko (fiktivno) prigušenje (veštačko prigušenje)

4. Prigušenje u MKE – Viskozno prigušenje

- Jednačina kretanja za sistem sa jednim stepenom slobode sa prigušenjem

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ - Neprigušena sopstvena frekvencija

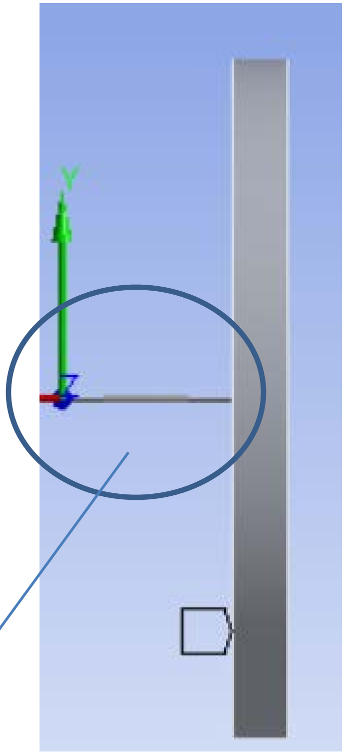
$$c_c = 2\sqrt{k \cdot m} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n}$$ - Kritično prigušenje (granica između oscilatornog i neocilatornog ponašanja)

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$ - Odnos prigušenja (bezdimenzioni koeficijet prigušenja) (odnos između koeficijenta prigušenja u sistemu i kritičnog prigušenja)

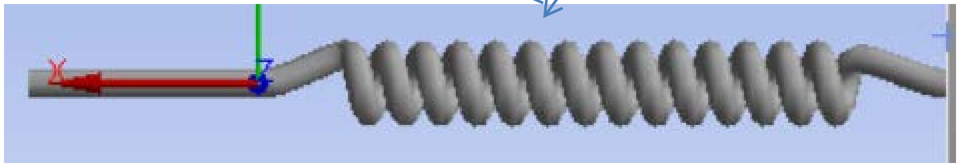
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$ - Frekvencija prigušenih oscilacija)

4. Prigušenje u MKE – Viskozno prigušenje

- Vrednost prigušenja ***c*** se može direktno definisati kada se koristi konačni element sa prigušenjem kao što je opruga.
- ***$c = \xi * c_c$***



Type	Longitudinal
Spring Behavior	Both
Longitudinal Stiffness	3. N/m
Longitudinal Damping	14. N·s/m



4. Prigušenje u MKE

- Matrica prigušenja

$$[C] = \underbrace{\alpha[M] + \sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m [M_i]}_{\text{Prigušenje mase}} + \underbrace{\beta[K] + \sum_{j=1}^{N_{mb}} \beta_j^m [K_j]}_{\text{Prigušenje krutosti}}$$

- Pretpostavlja se da je prigušenje proporcionalno, odnosno da predstavlja linearnu kombinaciju mase i krutosti.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

- Kod proporcionalnog prigušenja, prigušenje svakog moda se smatra jednakim.
- α, β - faktori participacije matrice masa i matrice krutosti u matrici prigušenja sistema

4. Prigušenje u MKE – Prigušenje mase i krutosti

- Koeficijenti prigušenja α, β su Rejlijevi koeficijenti prigušenja. Matrica prigušenja se određuje korišćenjem ovih konstanti - multipliciranjem matrice masa i matrice krutosti.

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

- Prigušenje materijala, u formi viskoznog (proporcionalnog) prigušenja, uvodi se primenom faktora participacije mase i krutosti sistema.

- Veza između odnosa prigušenja za *i*-ti sopstevni oblik i faktora participacije matrice masa i matrice krutosti u matrici prigušenja sistema je:

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2};\quad i=1,2.....n$$

- U mnogim praktičnim strukturnim problemima faktor participacije mase može se zanemariti (α = 0).

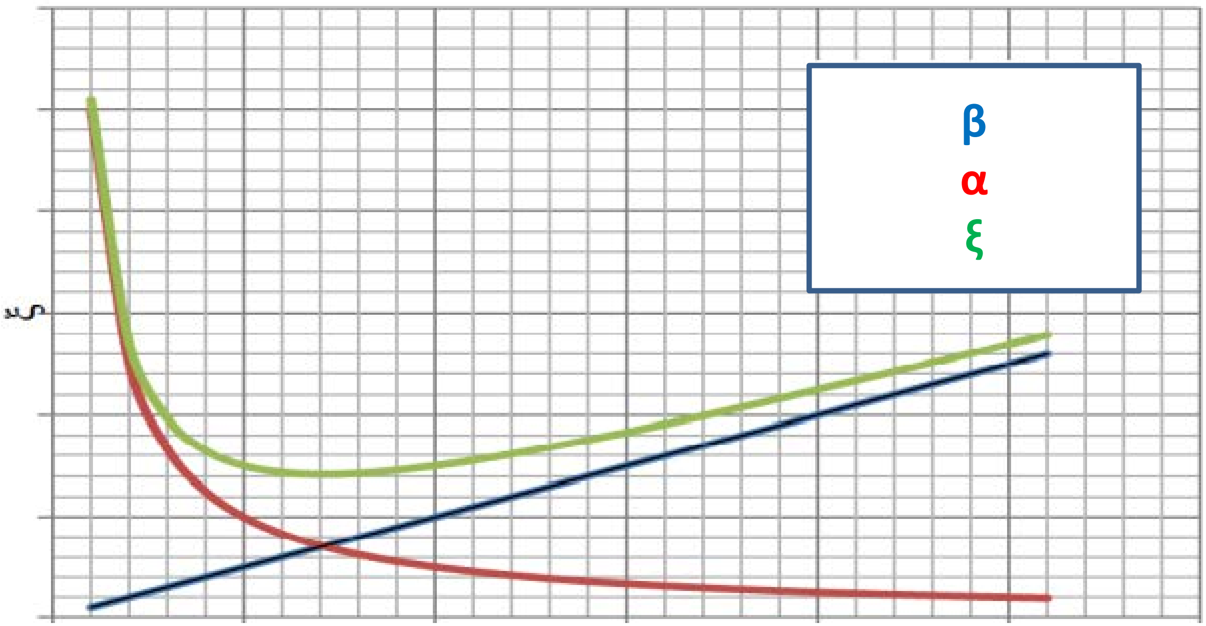
$$\xi_i=\frac{\beta\omega}{2};\quad \beta=\frac{2\xi}{\omega}$$

- Za datu vrednost β odnos prigušenja ξ je direktno proporcionalan frekvenciji, tj. niže frekvencije će biti manje prigušene, a veće frekvencije će biti više prigušene.

4. Prigušenje u MKE – Prigušenje mase i krutosti

- Za datu vrednost faktora participacije mase α (β=0) odnos prigušenja ξ je inverzno d proporcionalan frekvenciji, tj. niže frekvencije će biti više prigušene, a veće frekvencije će biti manje prigušene.

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega}; \quad \alpha = 2\xi\omega$$



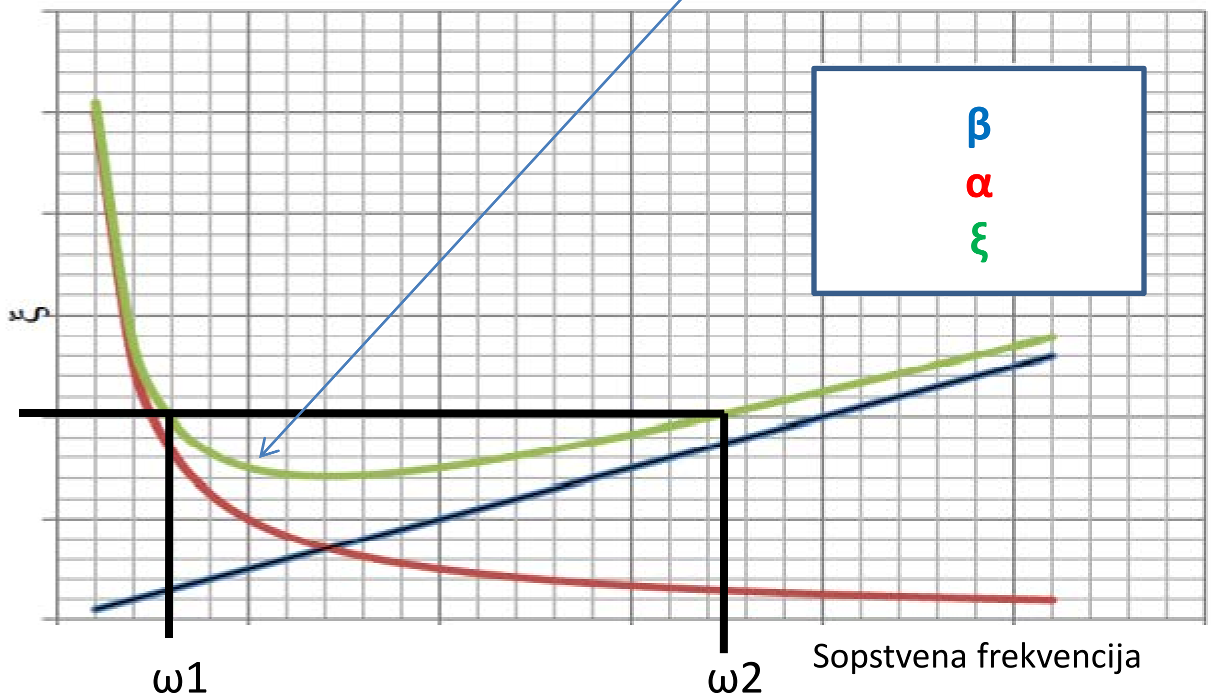
Sopstvena frekvencija

4. Prigušenje u MKE – Prigušenje mase i krutosti

- Ukoliko su odnosi prigušenja jednaki za sve sopstvene oblike vibracija i ako se uzmu u obzir oba faktora participacije onda je:

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}; \qquad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1+\omega_2}$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_1} + \frac{\beta\omega_1}{2} = \xi_2 = \frac{\alpha}{2\omega_2} + \frac{\beta\omega_2}{2} = \boxed{\xi}$$



4. Prigušenje u MKE – Histerezisno prigušenje

- Prigušenje materijala, u formi histerezisnog prigušenja, uvodi se primenom faktora participacije mase i krutosti sistema, analogno principu uvođenja viskoznog prigušenja.
- Ovo prigušenje se uvodi kod analiza u frekventnom domenu, te se u proračunu primenjuje matrica histerezisnog prigušenja.

$$[C]=\frac{2}{\Omega}g[K]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi = g$$

koef. strukturnog prigušenja

- Za razliku od viskoznog prigušenja, frekvencija prigušenih oscilacija se ne menja.
- Sila prigušenja je proporcionalna brzini, a obrnuto proporcionalna frekvenciji

5. Modalna analiza sa prigušenjem

- Linearna jednačina kretanja za slobodne prigušene vibracije je:

$$[M]\{\ddot{u}\} + \boxed{[C]\{\dot{u}\}} + [K]\{u\} = 0$$

- Imagionarni deo sopstvenih vrednosti je sopstvena frekvencija

- Realni deo sopstvenih vrednosti je mera stabilnosti

pozitivno = nestabilno

negativno = stabilno

- Frekvencija se često prikazuje u funkciji brzine pomoću Campbel-ovog dijagrama, jer modovi oscilovanja rotirajućih elemenata postaju nestabilni pri većim brzinama.

- Ugaona frekvencija prigušenih oscilacija je

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Koeficijent prigušenja

Ugaona frekvencija neprigušenih oscilacija

5. Modalna analiza sa prigušenjem

- Vrednosti α, β se kao ulazne veličine mogu definisati kao:

1 Vrednost prigušenja koja zavisi od materijala

$$[C]=\sum_{i=1}^{N_{ma}}\alpha_i^m\,[M_i]+\sum_{j=1}^{N_{mb}}\beta_j^m\left[K_j\right]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2};\quad i=1,2$$

$$\alpha=\frac{2\omega_i\omega_j\left(\xi_i\omega_j-\xi_j\omega_i\right)}{\omega_j^2-\omega_i^2}$$

$$\beta=\frac{2\left(\xi_j\omega_j-\xi_i\omega_i\right)}{\omega_j^2-\omega_i^2}$$

Definisno u podacima o materijalu

Properties of Outline Row 3: Structural Steel

	A	B
1	Property	Value
2	Density	7850
3	Damping Factor (α)	
4	Mass-Matrix Damping Multiplier	12.56
5	Damping Factor (β)	
6	k-Matrix Damping Multiplier	0.003
7	Isotropic Elasticity	

Implementacija prigušenja u model podrazumeva da je izvršena modalna analiza neprigušenih oscilacija strukture.

5. Modalna analiza sa prigušenjem

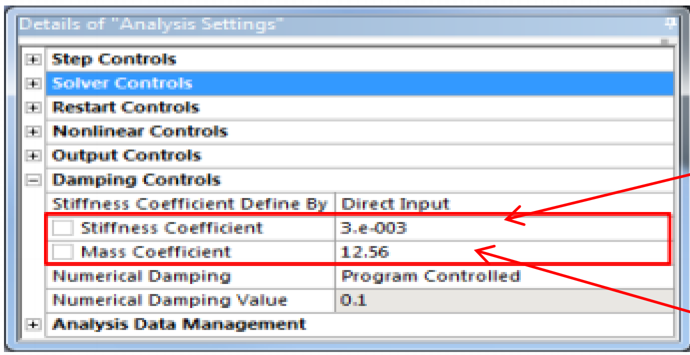
2 Direktno kao opšta vrednost prigušenja

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_1=\frac{\alpha}{2\omega_1}+\frac{\beta\omega_1}{2}=\xi_2=\frac{\alpha}{2\omega_2}+\frac{\beta\omega_2}{2}=\xi$$

$$\alpha=\frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2};\qquad \beta=\frac{2\xi}{\omega_1+\omega_2}$$



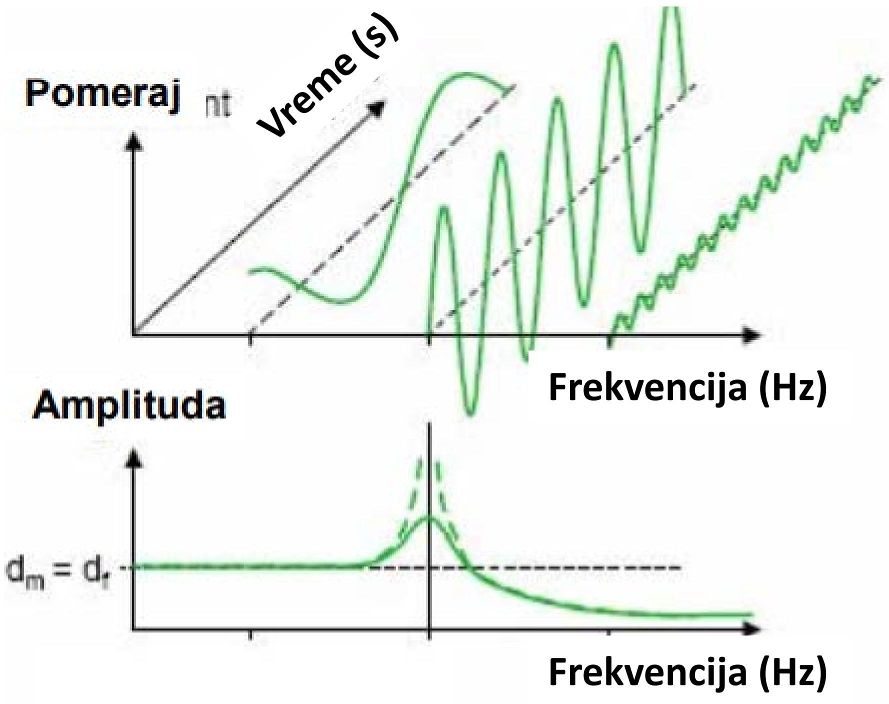
β

α

Koeficijenti struturnog prigušenja (ξ) se razmatraju u opsegu, (0,1-0,2%) za čelik

6. Harnonijska analiza

- Koristi se određivanje stacionarnog odziva konstrukcije pod opterećenjem koje se sinusno (harmonijski) menja tokom vremena.
- Ukoliko se na konstrukciju deluje spoljašnjom sinusnom silom, odziv će pratiti silu, - *kretanje konstrukcije ima istu frekvenciju kao i spoljašnja sila.*

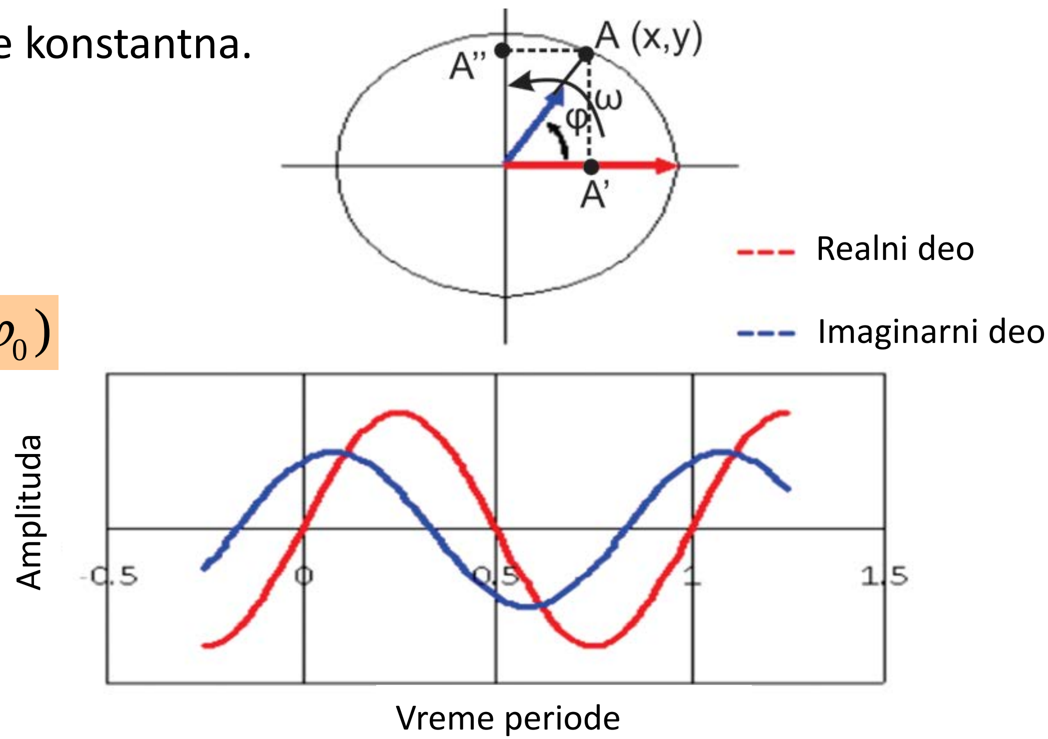


6. Harmonijska analiza

- Sva opterećenja i pomeranja menjaju se sinusoidno na istoj poznatoj frekvenciji (ne nužmo i na fazi)
- Pretpostavlja se da sve izlazne veličine javljaju na istoj frekvenciji.
- Vektor položaja sa *x*-osom gradi ugao: **φ = ωt**. Veličina **φ** se naziva fazni ugao.
- Kretanje tačke **A** se ponavlja periodično nakon **2π** radijana, tako da je: **ω = 2π*f***
- Kod harmonijskog kretanja **ω** je konstantna.

$$F_i = F_i \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$x(t) = A_x \cos\varphi = A_x \cos(\omega t - \varphi_0)$$



6. Harnonijska analiza

- Jednačina kretanja za linearnu strukturu je:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\}$$

- Pretpostavlja se da su {F} i {u} harmonični sa frekvencijom Ω :

$$\{F\}=\left\{F_{\max}e^{i\psi}\right\}e^{i\Omega t}$$

$$\{u\}=\left\{u_{\max}e^{i\psi}\right\}e^{i\Omega t}$$

- Izvodi po vremenu daju pomeranje, brzinu i ubrzanje:

$$\{u\}=\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{u}\}=i\Omega\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{u}\}=-\Omega^2\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)e^{i\Omega t}$$

ω - Izlazna (sopstvena) kružna frekvencija

Ω - Ulazna (prinudna) kružna frekvencija

6. Harmonijska analiza

- Jednačina kretanja za linearnu strukturu je:

$$\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[C]+[K]\right)\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)=\left(\{F_1\}+i\{F_2\}\right)$$

- Potpunom harmonijskom analizom odziva (**F**ull **HA**rmonic response **A**nalysis)
  - Rešava sistem simultanih jednačina direktno koristeći solver za statički analizu:

$$\underbrace{\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[C]+[K]\right)}_{[Kc]}\underbrace{\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)}_{\{Uc\}}=\underbrace{\left(\{F_1\}+i\{F_2\}\right)}_{\{Fc\}}$$

[Kc] x **{Uc}** = **{Fc}**

- Analiza odziva superpozicije osnovnih modova (**M**ode **SU**perposition response **A**nalysis)
  - Izražava pomeranja kao linearnu kombinaciju modova oscilovanja:

$$\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[C]+[K]\right)\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)=\left(\{F_1\}+i\{F_2\}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(-\Omega^2+i2\omega_j\Omega\xi_j+\omega_j^2\right)y_{jc}=f_{jc}$$

6. Harnonijska analiza – Potpuna harmonijskom analizom

- Tačna rešenja.
- Generalno posmatrano, potrebno je veće vreme za rešavanje od MSUP-a.
- Podržava sve vrste opterećenja i granične uslove.
- Tačke rešenja mogu biti ravnomerno raspoređene po frekventnom domenu ili nejednako raspoređene na korisnički definisanim lokacijama.
- Vrednosti prigušenja α, β se kao ulazne veličine mogu definisati kao:

1 Vrednost prigušenja koja zavisi od materijala

$$[C]=\sum_{i=1}^{N_{ma}}\alpha_i^m[M_i]+\sum_{j=1}^{N_{mb}}\left(\beta_j^m+\frac{1}{\Omega}g_j\right)[K_j]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2}+g$$

Definisno u podacima o materijalu

Properties of Outline Row 3: Structural Steel

	A	B
1	Property	Value
2	Constant Damping Coefficient	0.01
3	Damping Factor (α)	
4	Mass-Matrix Damping Multiplier	12.56
5	Damping Factor (β)	
6	k-Matrix Damping Multiplier	0.003

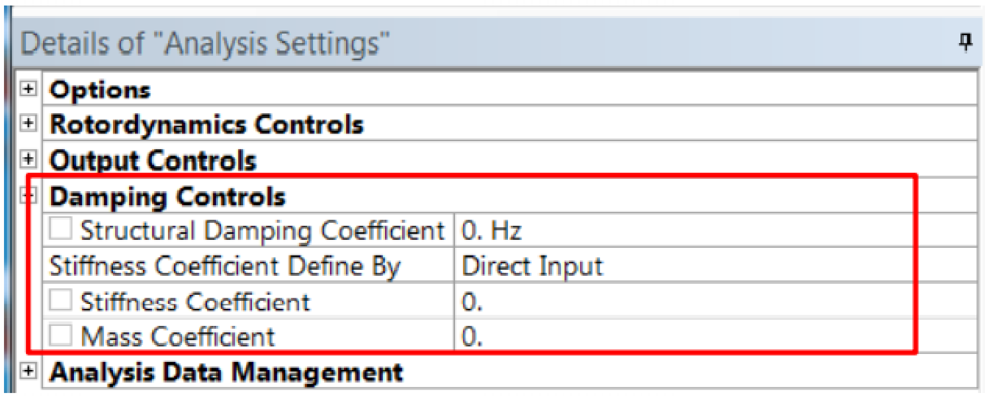
6. Harnonijska analiza – Potpuna harmonijskom analizom

2 Direktno kao opšta vrednost prigušenja

$$[C]=\alpha[M]+\left(\beta+\frac{1}{\Omega}g\right)[K]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2}+g=0,005-0,07$$



6. Harnonijska analiza – Opterećenje i ograničenje

	Metoda rešavanja	Fazni ulaz	Zavisnost frekvencije
Ubrzanje	FHAA/MSUA	Ne	Da
Pritisak	FHAA/MSUA	Da	Da
Sila	FHAA/MSUA	Da	Da
Moment	FHAA/MSUA	Da	Da
Pomerna sila (Remote force)	FHAA/MSUA	Da	Da
Ležajno opterećenje	FHAA/MSUA	Ne	Ne
Pomeranje	FHAA/MSUA	Da	Da
Pomereno pomeranje (Remote displacement)	FHAA	Da	Ne

Pomeranje kao opterećenje se može primeniti u MSUA kao osnovna pobuda primenjena na fiksne oslonce ili na opruge tipa "Body-Ground".

6. Harnonijska analiza – Opterećenje i ograničenje

Specifična harmonijska opterećenja zahtevaju:

- Amplitudu *Fimax* ili relani deo
- Fazni ugao φ ili imaginarni deo
- Frekvenciju ω

$$F_i = F_{i\max} \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

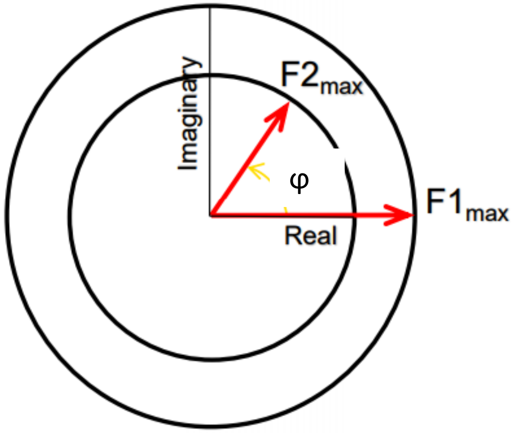
- Vrednost opterećenja (veličina) predstavlja amplitudu (F1 i F2).
- Fazni ugao φ je fazni pomak između dva ili više harmonijskih opterećenja.
- Fazni ugao φ nije potrebno ako je prisutno samo jedno opterećenje.
- Realni i imaginarni deo:

$$F_{1Real.} = F_{1\max} \cos\left(0^{\circ}\right) = F_{1\max}$$

$$F_{1Imag.} = F_{1\max} \sin\left(0^{\circ}\right) = 0$$

$$F_{2rReal.} = F_{2\max} \cos\left(\varphi\right)$$

$$F_{2rImag.} = F_{2\max} \sin\left(\varphi\right)$$



6. Harnonijska analiza – Analiza superpozicije modova

- Približno rešenje - tačnost zavisi od toga da li je izvučen odgovarajući broj modova.
- Generalno brže od potpune analize.
- Tačke rešenja mogu biti podjednako raspoređene po frekventnom domenu, grupisane oko sopstvenih frekvencija strukture ili definisane od korisnika.
- Rešava nevezani sistem jednačina izvođenjem linearne kombinacije normalnih vektora (oblika oscilovanja).
- Modovi oscilovanja su poznati kao generalizovane koordinate i u ovom slučaju y_1 i y_2 su stepeni slobode
- Vrednosti prigušenja se kao ulazne veličine mogu definisati kao:

$$\xi_i^d = \xi + \xi_i^m + \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$